

# XIV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

SEGUNDO DÍA

28 de septiembre de 2022

**Problema 4.** Dado un entero positivo  $n$ , determinar cuántas permutaciones  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, 2022n\}$  tienen la siguiente propiedad: para cada  $i \in \{1, 2, \dots, 2021n + 1\}$ , el número

$$\sigma(i) + \sigma(i + 1) + \dots + \sigma(i + n - 1)$$

es múltiplo de  $n$ .

**Problema 5.** Se define en el plano la sucesión de vectores  $v_1, v_2, \dots$ , mediante los valores iniciales  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  y la relación

$$v_n = \frac{v_{n-1} + v_{n-2}}{\|v_{n-1} + v_{n-2}\|},$$

para  $n \geq 3$ . Demostrar que la sucesión es convergente y determinar su límite.

**Nota:** La expresión  $\|v\|$  denota la longitud del vector  $v$ .

**Problema 6.** Dado un entero positivo  $m$ , sea  $d(m)$  la cantidad de divisores positivos de  $m$ . Demostrar que para todo entero positivo  $n$  se cumple que

$$d((n + 1)!) \leq 2d(n!).$$

*Tiempo: 4 horas y media  
Cada problema vale 10 puntos*