XIV Competencia Iberoamericana Interuniversidades de Matemáticas

Primer día

27 de septiembre de 2022

Problema 1. Dada la función $f(x) = x^2$, se define el *sector* de f desde a hasta b como la región acotada entre la gráfica de $y = f(x)$ y el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Se define la sucesión creciente $x_0, x_1, \ldots$, con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, que cumple que el área del sector de f desde x_n hasta x_{n+1} es constante para $n \geq 0$. Determinar el valor de x_n en función de n.

Problema 2. Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector de longitud 1 y sea A una matriz 2×2 con entradas reales tal que:

(i) Los vectores Av, A^2v y A^3v también son de longitud 1.

(ii) El vector A^2v no es igual ni a $\pm v$ ni a $\pm Av$.

Demostrar que $A^tA = I_2$.

Nota: A^t denota la traspuesta de la matriz A, e I_2 es la matriz identidad de tamaño 2×2.

Problema 3. Danielle dibuja en el plano un punto O y un conjunto de puntos $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_{2022}\}$ tales que

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \cdots = \angle P_{2021}OP_{2022} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$$

donde los ángulos se miden en sentido antihorario, y para $0 \leq n \leq 2022$ se cumple que $OP_n = r^n$ con $r > 1$ un número real dado. Luego obtiene nuevos conjuntos de puntos en el plano iterando el siguiente proceso: dado un conjunto de puntos $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ en el plano, construye un nuevo conjunto de puntos $\{B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ de modo que $A_kA_{k+1}B_k$ sea un triángulo equilátero orientado en sentido horario para $0 \leq k \leq n-1$. Después de realizar el proceso 2022 veces a partir del conjunto $\mathcal{P}$, Danielle obtiene un único punto X. Si d es la distancia de X al punto O, demostrar que

$$(r-1)^{2022} \leq d \leq (r+1)^{2022}.$$

Tiempo máximo: 4 horas y media
Cada problema vale 10 puntos