Segundo día

23 de octubre del 2020

Problema 4. Para todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, se definen

$$P_0 = P(0) \quad \text{y} \quad P_j(x) = x^j \cdot P^{(j)}(x),$$

donde $P^{(j)}$ representa la j-ésima derivada de P para $j \geq 1$.

(a) Demuestre que existe una única sucesión de reales $b_0, b_1, b_2, \ldots$ tal que para todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y todo x real, se cumple que

$$P(x) = b_0 P_0 + \sum_{k\geq 1} b_k P_k(x) = b_0 P_0 + b_1 P_1(x) + b_2 P_2(x) + \cdots .$$

(b) Calcule el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Problema 5. Determine todos los números reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ tales que

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + 2}{3x_i^2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, 2020$ y además $x_{2021} = x_1$.

Problema 6. Para un conjunto A se define $A + A = \{a + b : a, b \in A\}$. Determine si existe un conjunto A de enteros positivos tal que

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|(A + A) \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

23 de outubro de 2020

Problema 4. Para todo polinômio $P(x)$ com coeficientes reais, definem-se

$$P_0 = P(0) \quad \text{e} \quad P_j(x) = x^j \cdot P^{(j)}(x),$$

onde $P^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de P para $j \geq 1$.

(a) Demonstre que existe uma única sequência de números reais $b_0, b_1, b_2, \ldots$ tal que para todo polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e todo x real, vale que

$$P(x) = b_0 P_0 + \sum_{k \geq 1} b_k P_k(x) = b_0 P_0 + b_1 P_1(x) + b_2 P_2(x) + \cdots .$$

(b) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Problema 5. Determine todos os números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ tais que

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + 2}{3x_i^2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, 2020$ e, além disso, $x_{2021} = x_1$.

Problema 6. Para um conjunto A, define-se $A + A = \{a + b : a, b \in A\}$. Determine se existe um conjunto A de inteiros positivos tal que

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{|(A + A) \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.