# Primer día

22 de octubre del 2020

**Problema 1.** Sea $\alpha > 1$ y considere la función $f(x) = x^\alpha$ para $x \geq 0$. Para $t > 0$, defina $M(t)$ como la mayor área que alcanza un triángulo con vértices $(0,0)$, $(s, f(s))$ y $(t, f(t))$ para $s \in (0,t)$. Sea $A(t)$ el área de la región delimitada por el segmento con extremos $(0,0)$ y $(t, f(t))$ y por el gráfico de $y = f(x)$.

(a) Demuestre que $A(t)/M(t)$ no depende de $t$. Denotamos este valor por $c(\alpha)$. Determine $c(\alpha)$.

(b) Determine el rango de valores de $c(\alpha)$ cuando $\alpha$ varía en el intervalo $(1, +\infty)$.

**Problema 2.** Determine todas las triplas de enteros positivos $(a, b, c)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a^3 + b^3 + 1 = (c-1)^3. \end{cases}$$

**Problema 3.** Sean $m, r, s, t$ enteros positivos tales que $m \geq s+1$ y $r \geq t$. Considere $m$ conjuntos $A_1, A_2, ..., A_m$ con $r$ elementos cada uno. Suponga que para todo $1 \leq i \leq m$, existen por lo menos $t$ elementos de $A_i$ que pertenecen, cada uno de ellos, a por lo menos $s$ conjuntos $A_j$ con $j \neq i$. Determine el mayor número posible de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$.

**La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.**
**Tiempo máximo: 4h 30m.**

# Primeiro dia

22 de outubro de 2020

**Problema 1.** Seja $\alpha > 1$ e considere a função $f(x) = x^\alpha$ para $x \geq 0$. Para $t > 0$, defina $M(t)$ como a maior área possível de um triângulo com vértices $(0, 0)$, $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ para $s \in (0, t)$. Seja $A(t)$ a área da região delimitada pelo segmento com extremidades $(0, 0)$ e $(t, f(t))$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

(a) Demonstre que $A(t)/M(t)$ não depende de $t$. Denotamos esse valor por $c(\alpha)$. Determine $c(\alpha)$.

(b) Determine o conjunto de valores que $c(\alpha)$ pode tomar quando $\alpha$ varia no intervalo $(1, +\infty)$.

**Problema 2.** Determine todas as triplas de inteiros positivos $(a, b, c)$ que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a^3 + b^3 + 1 = (c-1)^3. \end{cases}$$

**Problema 3.** Sejam $m, r, s, t$ inteiros positivos tais que $m \geq s + 1$ e $r \geq t$. Considere $m$ conjuntos $A_1, A_2, ..., A_m$, com $r$ elementos cada um. Suponha que, para todo $1 \leq i \leq m$, existem pelo menos $t$ elementos de $A_i$ que pertencem, cada um deles, a pelo menos $s$ conjuntos $A_j$ com $j \neq i$. Determine o maior número possível de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$.

**Cada problema vale 10 pontos**
**Tempo máximo: 4h 30m.**