Fracciones continuas, aproximaciones y un poco de dinámica

Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira
(IMPA, Rio de Janeiro, Brasil)

CIIM - 20/10/2020

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa.

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente. A ideia de *representação* de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente. A ideia de *representação* de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser $+$ ou $-$, e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. E $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Por outro lado, dizer precisamente o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais.

Por outro lado, dizer precisamente o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x - k < 1$. Podemos escrever a representação decimal de $x - k$:

$$x - k = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \qquad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

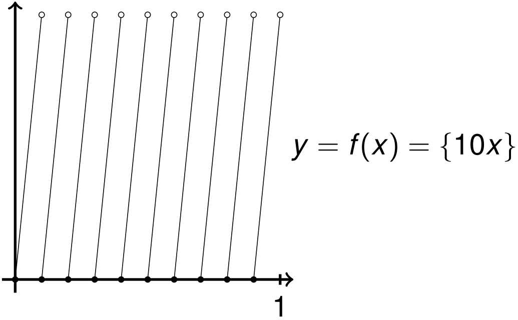
o que significa que se $r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 100 \cdot a_{n-2} + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_1$, então $\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n+1}{10^n}$, e portanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x, no sentido de que o erro $\left|x - \left(k + \frac{r_n}{10^n}\right)\right|$ é menor do que $\frac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece pois uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Vamos lembrar uma notação que nos será muito útil: dado $x \in \mathbb{R}$, definimos a *parte inteira* de x como o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, e a *parte fracionária* de x como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Vamos lembrar uma notação que nos será muito útil: dado $x \in \mathbb{R}$, definimos a *parte inteira* de x como o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, e a *parte fracionária* de x como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

A representação decimal de números reais está intimamente ligada à função $f : [0, 1) \to [0, 1)$ dada por $f(x) = \{10x\} = 10x - \lfloor 10x \rfloor$, mais precisamente, à *dinâmica* da função f. Por dinâmica da função f queremos dizer o estudo de suas composições sucessivas: para cada ponto $x \in [0, 1)$, estamos interessados na sequência $x, f(x), f(f(x)), \cdots \in [0, 1)$, cujos termos são os chamados *iterados* sucessivos da f.

Representamos abaixo o gráfico de $f(x) = \{10x\}$.



De fato, se $x \in [0,1)$ tem representação decimal $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, então $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$ e $f(x) = 0, a_2 a_3 a_4 \ldots$. Assim, definindo $f^1 = f$ e $f^{n+1} = f \circ f^n$, temos $f^n(x) = 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \ldots$ para todo $n \geq 1$. Assim, por exemplo, se $x = 1/3 = 0,333\ldots$, temos $f(x) = 0,333 \cdots = x$ (nesse caso, dizemos que $x = 1/3$ é um *ponto fixo* de f); se $x = 4/33 = 0,121212\ldots$, temos $f(x) = 0,212121\ldots$ e $f(f(x)) = 0,121212 \cdots = x$ (nesse caso dizemos que $x = 4/33$ é um *ponto periódico* de período 2 de f) e, se $x \in [0,1]$ é irracional, os seus iterados por f serão todos distintos, pois sua representação decimal não será periódica a partir de nenhum dígito.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$ (basta tomar p inteiro tal que $p \leq qx < p+1$, i.e., $p = \lfloor qx \rfloor$), e portanto $\left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|x - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q}$, donde $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ e $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$. Além disso, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ ou $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$. Em particular há infinitas aproximações de x por racionais com denominador q com erro menor do que $\frac{1}{q}$.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$ (basta tomar p inteiro tal que $p \leq qx < p+1$, i.e., $p = \lfloor qx \rfloor$), e portanto $\left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|x - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q}$, donde $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ e $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$. Além disso, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ ou $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$. Em particular há infinitas aproximações de x por racionais com denominador q com erro menor do que $\frac{1}{q}$.

A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta frequentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exibe.

Senão vejamos: tomemos um número real totalmente ao acaso, digamos

Senão vejamos: tomemos um número real totalmente ao acaso, digamos
$\pi = 3,14159265358979323846264338327950 2884\ldots$.

Senão vejamos: tomemos um número real totalmente ao acaso, digamos $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288 4\ldots$.
Uma aproximação clássica de π por um número racional é $22/7 = 3,142857142857\ldots$, devida a Arquimedes.

Senão vejamos: tomemos um número real totalmente ao acaso, digamos $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288 4\ldots$.
Uma aproximação clássica de π por um número racional é $22/7 = 3,142857142857\ldots$, devida a Arquimedes.
Uma outra aproximação ainda melhor é $355/113 = 3,1415929203539823\ldots$.

Senão vejamos: tomemos um número real totalmente ao acaso, digamos
$\pi = 3,14159265358979323846264338327950 2884\ldots$.
Uma aproximação clássica de π por um número racional é $22/7 = 3,142857142857\ldots$, devida a Arquimedes.
Uma outra aproximação ainda melhor é
$355/113 = 3,1415929203539823\ldots$.
Note que $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right|$ e

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|,$$

e portanto $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito melhores do que se poderia esperar pelo tamanho dos denominadores envolvidos.

Vamos apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por *frações contínuas*, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas as aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural, conceitualmente simples e não depender de nenhuma escolha artificial de base.

Vamos apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por *frações contínuas*, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas as aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural, conceitualmente simples e não depender de nenhuma escolha artificial de base.
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos recursivamente

$$\alpha_0 = \alpha, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

$$\text{e, se } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{1}{\{\alpha_n\}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$ temos

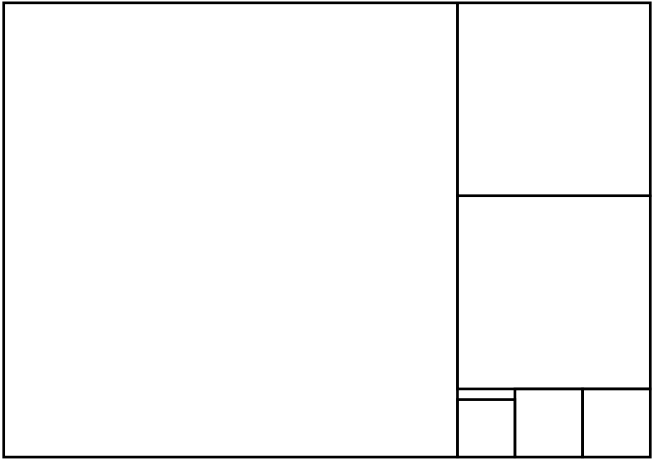
$$\alpha = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Se não denotamos

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama *representação por frações contínuas de* α.

A figura abaixo dá uma interpretação geométrica para a representação de um número por frações contínuas.



(Enchemos um retângulo $1 \times \alpha$ com quadrados de forma “gulosa", isto é, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho. Na figura, se os lados do retangulo são $c < d$ então

$$d/c = [1; 2, 2, 1, ...].)$$

De fato, temos $a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 2$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrados ainda ainda menores, e um número grande não desenhado de quadrados ainda ainda ainda menores (a_4 é grande).

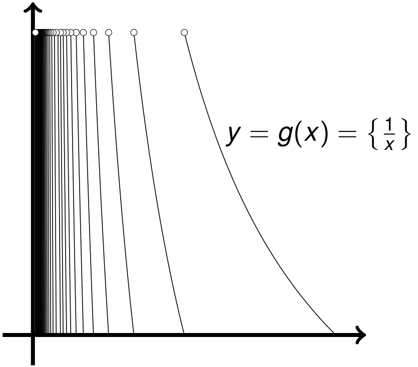
Note que, se a representação por frações contínuas de α for finita então α é claramente racional.

Note que, se a representação por frações contínuas de α for finita então α é claramente racional.
Reciprocamente, se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita.
Isto está diretamente ligado ao algoritmo de Euclides aplicado para determinar o máximo divisor comum de p e q, e os coeficientes que aparecem no algoritmo de Euclides são os mesmos coeficientes a_n que aparecem na fração contínua de α.

Note que, se a representação por frações contínuas de α for finita então α é claramente racional.
Reciprocamente, se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita. Isto está diretamente ligado ao algoritmo de Euclides aplicado para determinar o máximo divisor comum de p e q, e os coeficientes que aparecem no algoritmo de Euclides são os mesmos coeficientes a_n que aparecem na fração contínua de α.
Isso já é uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Do mesmo modo que a representação decimal está ligada à dinâmica da função $f(x) = \{10x\}$, como vimos anteriormente, a representação em frações contínuas está intimamente ligada à dinâmica da função $g : (0, 1) \to [0, 1)$, dada por $g(x) = \{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, também conhecida como *transformação de Gauss*: se $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0, 1)$, então $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ e $g(\alpha) = [0; a_2, a_3, a_4, ...]$. Assim, definindo, como antes $g^1 = g$ e $g^{n+1} = g \circ g^n$ para todo $n \geq 1$, temos $g^n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$, para todo $n \geq 1$.

Representamos abaixo o gráfico da transformação de Gauss $g(x) = \{\frac{1}{x}\}$.



Vejamos alguns exemplos:
Temos

- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ pois
  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$

Vejamos alguns exemplos:
Temos

- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ pois
  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$ pois
  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots$

Vejamos alguns exemplos:
Temos

- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ pois
  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$ pois
  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots$

Isto prova em particular que $\sqrt{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são irracionais, pois suas frações contínuas são infinitas. Note que, da discussão anterior segue que $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2 \ldots]$ e $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \ldots]$ são pontos fixos da transformação de Gauss g.

O fato de essas representações serem periódicas a partir de um certo ponto não é casual: Lagrange provou que a representação em frações contínuas de um número irracional α é periódica a partir de um certo ponto se e somente se $\alpha = r \pm \sqrt{s}$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ (este fato é conhecido como o Teorema de Lagrange); assim, se $\alpha = r \pm \sqrt{s} \in (0, 1)$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ é irracional, α será *pré-periódico* pela transformação de Gauss g: sua *órbita* (i.e, o conjunto de seus iterados) por g será finita.

O fato de essas representações serem periódicas a partir de um certo ponto não é casual: Lagrange provou que a representação em frações contínuas de um número irracional α é periódica a partir de um certo ponto se e somente se $\alpha = r \pm \sqrt{s}$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ (este fato é conhecido como o Teorema de Lagrange); assim, se $\alpha = r \pm \sqrt{s} \in (0, 1)$, com $r, s \in \mathbb{Q}$ é irracional, α será *pré-periódico* pela transformação de Gauss g: sua *órbita* (i.e, o conjunto de seus iterados) por g será finita.
Nesse caso, como no caso dos racionais, a representação em frações contínuas é bem mais simples que a representação decimal. Esse também é o caso para $e = 2,718281828459045235360287...$: temos $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots, 1, 1, 2n, \dots]$.

Frações contínuas, reduzidas e boas aproximações

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sejam $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ primos entre si, com $q_n > 0$, tais que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n \geq 0$. Esta fração $\frac{p_n}{q_n}$ é chamada de n-ésima *reduzida* ou *convergente* da fração contínua de α.

Frações contínuas, reduzidas e boas aproximações

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Sejam $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ primos entre si, com $q_n > 0$, tais que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $n \geq 0$. Esta fração $\frac{p_n}{q_n}$ é chamada de n-ésima *reduzida* ou *convergente* da fração contínua de α.

Vejamos um exemplo: temos $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \dots]$, e portanto, em particular,

$$\frac{p_1}{q_1} = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \text{ e } \frac{p_3}{q_3} = [3; 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}.$$

Já vimos essas frações antes, e isso não é por acaso.

As reduzidas da fração contínua de um número real α são sempre aproximações muito boas de α, e qualquer aproximação racional realmente muito boa de α deve necessariamente ser uma reduzida de sua fração contínua, como mostram os resultados a seguir:

As reduzidas da fração contínua de um número real α são sempre aproximações muito boas de α, e qualquer aproximação racional realmente muito boa de α deve necessariamente ser uma reduzida de sua fração contínua, como mostram os resultados a seguir:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, α está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Mais precisamente, se n é par, $\frac{p_n}{q_n} < \alpha \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, e, se n é ímpar, $\frac{p_n}{q_n} > \alpha \geq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

As reduzidas da fração contínua de um número real α são sempre aproximações muito boas de α, e qualquer aproximação racional realmente muito boa de α deve necessariamente ser uma reduzida de sua fração contínua, como mostram os resultados a seguir:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, α está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Mais precisamente, se n é par, $\frac{p_n}{q_n} < \alpha \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, e, se n é ímpar, $\frac{p_n}{q_n} > \alpha \geq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.
- As sequências (p_n) e (q_n) satisfazem as recorrências

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \text{ e } q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

  para todo $n \geq 0$
  (com $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0a_1 + 1, q_1 = a_1$).

As reduzidas da fração contínua de um número real α são sempre aproximações muito boas de α, e qualquer aproximação racional realmente muito boa de α deve necessariamente ser uma reduzida de sua fração contínua, como mostram os resultados a seguir:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, α está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Mais precisamente, se n é par, $\frac{p_n}{q_n} < \alpha \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, e, se n é ímpar, $\frac{p_n}{q_n} > \alpha \geq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.
- As sequências (p_n) e (q_n) satisfazem as recorrências

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \text{ e } q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

  para todo $n \geq 0$
  (com $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0a_1 + 1, q_1 = a_1$).
- $\mid \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \mid = \frac{1}{q_nq_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$\mid \alpha - \frac{p_n}{q_n} \mid < \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}{q_n}^2} \leq \frac{1}{q_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Para todo $n \geq 0$, $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}$ ou $\left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$. Assim, pelo menos uma dentre cada duas aproximações consecutivas de α por reduzidas é muito boa (neste sentido, de que o erro absoluto da aproximação é menor que a metade do inverso do quadrado do denominador da aproximação).

- Para todo $n \geq 0$, $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}$ ou $\left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$. Assim, pelo menos uma dentre cada duas aproximações consecutivas de α por reduzidas é muito boa (neste sentido, de que o erro absoluto da aproximação é menor que a metade do inverso do quadrado do denominador da aproximação).
- Se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de α, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. Assim, toda aproximação muito boa de α é uma reduzida.

- Para todo $n \geq 0$, $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}$ ou $\left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$. Assim, pelo menos uma dentre cada duas aproximações consecutivas de α por reduzidas é muito boa (neste sentido, de que o erro absoluto da aproximação é menor que a metade do inverso do quadrado do denominador da aproximação).
- Se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de α, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. Assim, toda aproximação muito boa de α é uma reduzida.
- (Teorema de Hurwitz-Markov) Para todo α irracional e todo inteiro $n \geq 1$, existe $k \in \{n-1, n, n+1\}$ tal que $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$.

Embora a transformação de Gauss g tenha infinitas órbitas periódicas de todos os períodos, para $\alpha \in (0,1)$ típico, o comportamento da órbita de α por g é bem diferente: para *quase todo* $\alpha \in (0,1)$ (no sentido da medida de Lebesgue), $\{g^n(\alpha), n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0,1]$, i.e., $\forall x \in [0,1], \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ com $|x - g^n(\alpha)| < \varepsilon$.

Embora a transformação de Gauss *g* tenha infinitas órbitas periódicas de todos os períodos, para $\alpha \in (0,1)$ típico, o comportamento da órbita de α por *g* é bem diferente: para *quase todo* $\alpha \in (0,1)$ (no sentido da medida de Lebesgue), $\{g^n(\alpha), n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0,1]$, i.e., $\forall x \in [0,1], \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ com $|x - g^n(\alpha)| < \varepsilon$.
Também é possível provar que, para quase todo $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$,

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = e^{\pi^2/12 \ln 2} = 3,27582291872181\dots$$

e

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|} = e^{-\pi^2/6 \ln 2} = 0,09318782295357587\dots$$

O espectro de Lagrange

Seja α um número irracional. Definimos $k(\alpha)$ como o único $k > 0$ (se existir) tal que, para todo $\varepsilon \in (0, k)$, $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{(k-\varepsilon)q^2}$ tem infinitas soluções racionais p/q e, para todo $\varepsilon > 0$, $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{(k+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções racionais p/q
(caso não exista um tal k, i.e., caso $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{kq^2}$ tenha infinitas soluções racionais p/q para todo $k > 0$, definimos $k(\alpha) = +\infty$).

O espectro de Lagrange

Seja α um número irracional. Definimos $k(\alpha)$ como o único $k > 0$ (se existir) tal que, para todo $\varepsilon \in (0, k)$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(k-\varepsilon)q^2}$ tem infinitas soluções racionais p/q e, para todo $\varepsilon > 0$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(k+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções racionais p/q

(caso não exista um tal k, i.e., caso $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{kq^2}$ tenha infinitas soluções racionais p/q para todo $k > 0$, definimos $k(\alpha) = +\infty$).

Pelo Teorema de Hurwitz-Markov, temos $k(\alpha) \geq \sqrt{5}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por outro lado, é possível provar que $k(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \sqrt{5}$.

Estamos interessados nos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $k(\alpha) < +\infty$, e, mais particularmente, na imagem da função k, mais precisamente, no conjunto

$$L = \{k(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ e } k(\alpha) < +\infty\}.$$

Este conjunto é conhecido como o *espectro de Lagrange*.
O conjunto L encodifica uma série de propriedades *diofantinas* (isto é, relativas às boas aproximações por números racionais) de números reais, e vem sendo estudado há bastante tempo.

Estamos interessados nos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $k(\alpha) < +\infty$, e, mais particularmente, na imagem da função k, mais precisamente, no conjunto

$$L = \{k(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ e } k(\alpha) < +\infty\}.$$

Este conjunto é conhecido como o *espectro de Lagrange*.
O conjunto L encodifica uma série de propriedades *diofantinas* (isto é, relativas às boas aproximações por números racionais) de números reais, e vem sendo estudado há bastante tempo. Talvez o primeiro resultado não-trivial sobre ele se deva a Markov, que provou em 1879 que

$$L \cap (-\infty, 3) = \left\{ k_1 = \sqrt{5} < k_2 = 2\sqrt{2} < k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} < \cdots \right\},$$

onde (k_n) é uma sequência convergente a 3 tal que $k_n \notin \mathbb{Q}$ mas $k_n^2 \in \mathbb{Q}$ para todo n. Assim, o "começo" do espectro de Lagrange é discreto. Como veremos, essa afirmação não é verdadeira para todo o conjunto L.

Os elementos do espectro de Lagrange menores que 3 são exatamente os números da forma $\sqrt{9 - \frac{4}{z^2}}$ onde z é um inteiro positivo para o qual existem outros inteiros positivos x, y tais que $1 \leq x \leq y \leq z$ e (x, y, z) é uma solução da *equação de Markov* $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Os elementos do espectro de Lagrange menores que 3 são exatamente os números da forma $\sqrt{9-\frac{4}{z^2}}$ onde z é um inteiro positivo para o qual existem outros inteiros positivos x, y tais que $1 \leq x \leq y \leq z$ e (x, y, z) é uma solução da *equação de Markov* $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

$\bullet(x, y, z)$ solução $\implies (y, z, 3yz - x), (x, z, 3xz - y)$ soluções.

$$\begin{tikzcd}
 & & & (1,1,1) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1,1,2) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1,2,5) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & (1,5,13) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & (2,5,29) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(1,13,34) & & (5,13,194) & & (2,29,169) & & (5,29,433)
\end{tikzcd}$$

Um problema em aberto importante sobre a equação de Markov é o *Problema da Unicidade*, formulado por Frobenius há cerca de 100 anos: para quaisquer inteiros positivos x_1, x_2, y_1, y_2, z com $x_1 \leq y_1 \leq z$ e $x_2 \leq y_2 \leq z$ tais que (x_1, y_1, z) e (x_2, y_2, z) são soluções da equação de Markov temos sempre $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$?

Marshall Hall provou em 1947 que L contém toda uma semi-reta (por exemplo $[6, +\infty)$), e G. Freiman determinou em 1975 a maior semi-reta que está contida em L, que é

$$\left[\frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569}, +\infty\right).$$

Marshall Hall provou em 1947 que L contém toda uma semi-reta (por exemplo $[6, +\infty)$), e G. Freiman determinou em 1975 a maior semi-reta que está contida em L, que é

$$\left[\frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569}, +\infty\right).$$

Uma apresentação detalhada destes e de outros resultados sobre o espectro de Lagrange pode ser encontrada em [CF].

Na referência [M2] são provados resultados sobre propriedades geométricas (relativas a geometria fractal) dos espectros de Markov e Lagrange, que envolvem resultados delicados sobre somas de conjuntos de Cantor regulares.

Se a representação em frações contínuas de α é

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

então temos a seguinte fórmula para $k(\alpha)$:

$$k(\alpha) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n),$$

onde $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ e

$$\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1].$$

Esta fórmula segue da igualdade

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(onde $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n], n \in \mathbb{N}$ são os convergentes da fração contínua de α).

Essa fórmula para $k(\alpha)$ implica a seguinte definição alternativa para L - uma caracterização dinâmica:
Seja $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das sequências bi-infinitas de inteiros positivos. Se $\underline{\theta} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$, sejam $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ e $\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots], \forall n \in \mathbb{Z}$.
Definimos $f(\underline{\theta}) = \alpha_0 + \beta_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots] + [0; a_{-1}, a_{-2}, \dots]$.
Temos então

$$L = \{\limsup_{n\to\infty} f(\sigma^n \underline{\theta}), \underline{\theta} \in \Sigma\}$$

onde $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ é a transformação deslocamento (“shift") dada por $\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Fractais aparecem naturalmente em Sistemas Dinâmicos e dimensões fractais aparecem naturalmente quando tentamos medir fractais.
A noção mais importante de dimensão fractal (de um espaço métrico) é a *dimensão de Hausdorff*.

Fractais aparecem naturalmente em Sistemas Dinâmicos e dimensões fractais aparecem naturalmente quando tentamos medir fractais.
A noção mais importante de dimensão fractal (de um espaço métrico) é a *dimensão de Hausdorff*.

A dimensão de Hausdorff de um espaço métrico X é

$$HD(X) = \inf\{s > 0; \inf_{X \subset \cup B(x_n, r_n)} \sum r_n^s = 0\}.$$

É uma ferramenta natural para medir fractais (como conjuntos de Cantor regulares), e para comparar subconjuntos da reta de medida de Lebesgue nula.

Teorema (M., 2018)

$HD(L \cap (-\infty, t)) =: d(t)$ é uma função contínua sobrejetiva de $\mathbb{R}$ e, $[0, 1]$. Além disso:
i) $d(t) = \min\{1, 2D(t)\}$, onde
$D(t) := HD(k^{-1}(-\infty, t)) = HD(k^{-1}(-\infty, t])$ é uma função contínua sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $[0, 1)$.
ii) $\max\{t \in \mathbb{R} \mid d(t) = 0\} = 3$.
iii) Existe $\delta > 0$ tal que $d(\sqrt{12} - \delta) = 1$.

Teorema (M., 2018)

$HD(L \cap (-\infty, t)) =: d(t)$ é uma função contínua sobrejetiva de $\mathbb{R}$ e, $[0,1]$. Além disso:
i) $d(t) = \min\{1, 2D(t)\}$, onde
$D(t) := HD(k^{-1}(-\infty, t)) = HD(k^{-1}(-\infty, t])$ é uma função contínua sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $[0,1)$.
ii) $\max\{t \in \mathbb{R} \mid d(t) = 0\} = 3$.
iii) Existe $\delta > 0$ tal que $d(\sqrt{12} - \delta) = 1$.

Nesse artigo também provamos que:

- $\lim_{t \to +\infty} HD(k^{-1}(t)) = 1$
- L' é um conjunto perfeito, i.e., $L' = L''$.

- F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro - Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- T. W. Cusick e M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys and Monographs, no. 30, A.M.S. (1989).
- Lorenzo J. Díaz, Danielle de Rezende Jorge, *Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007. 211 p.
- C. G. Moreira. Frações contínuas, representações de números e aproximações, Revista Eureka! No. 3, pp. 44-55; disponível também em `http://www.obm.org.br`

C.G. Moreira, Geometric properties of the Markov and Lagrange spectra, Annals of Math 188 (2018), no. 1, 145–170.
https://arxiv.org/abs/1612.05782

C.G. Moreira, Geometric properties of images of cartesian products of regular Cantor sets by differentiable real maps.
https://arxiv.org/abs/1611.00933

Muito obrigado!
Muchas gracias!
Thank you very much!
Merci beaucoup!

谢谢！

(. . .)