Prova dia 1

Domingo, 5 de outubro de 2014

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Valor: 10 pontos cada questão
Cada resposta deve ser justificada adequadamente.

1. Seja $g : [2013, 2014] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as duas seguintes condições:
   - $g(2013) = g(2014) = 0$,
   - para quaisquer $a, b \in [2013, 2014]$, tem-se que $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq g(a) + g(b)$.

   Demonstre que g possui zeros em qualquer subintervalo aberto $(c, d) \subset [2013, 2014]$.

2. Sejam n um inteiro positivo e p um primo maior que 2. Mostre que:

$$(p-1)^n n! \,\big|\, (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1}) \,.$$

3. Dado $n \geq 2$, seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos do conjunto com n elementos $\{1, \ldots, n\}$ tal que, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$, se verifica que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n - 2$.

   Mostre que $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-2}$.

   Nota: $|X|$ designa a cardinalidade do conjunto X.