II COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA

Segundo dia

Petrópolis, Brasil, 6 de outubro de 2010

Problema 4 Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função crescente, contínua em $[0,1]$, diferenciável em $(0,1)$ e com derivada menor que 1 em cada ponto. Definimos a sequência de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ da seguinte maneira: $A_1 = f([0,1])$, e para $n \geq 2$, $A_n = f(A_{n-1})$. Demonstre que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(A_n) = 0$, onde $d(A)$ é o diâmetro do conjunto A.

Obs.: O diâmetro de um conjunto X se define como $d(X) = \sup\limits_{x,y\in X} |x-y|$, ou em outras palavras como o comprimento do intervalo $[a,b]$ que contém X para o qual $b-a$ é mínimo.

Problema 5 Sejam n e d inteiros maiores que 1 com $\mathrm{mdc}(n, d!) = 1$. Prove que n e $n+d$ são primos se e somente se

$$d!d((n-1)!+1) + n(d!-1) \equiv 0 \pmod{n(n+d)}.$$

Problema 6 Dizemos que um grupo é localmente cíclico se cada um de seus subgrupos finitamente gerados é cíclico. Prove que um grupo localmente cíclico é isomorfo a um de seus subgrupos próprios se e somente se é isomorfo a um subgrupo próprio do grupo dos números racionais com a operação de soma.

Obs.:

– Um grupo é finitamente gerado se contém um subconjunto finito de elementos tal que com estes e seus inversos é possível obter qualquer outro elemento do grupo usando a operação do grupo um número finito de vezes.

– Um grupo é cíclico se é gerado por um único elemento.

– Um subgrupo próprio é um subgrupo estritamente contido no grupo.

Tempo de prova: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 10 pontos