II COMPETIÇÃO IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITÁRIA DE MATEMÁTICA

Primeiro dia

Petrópolis, Brasil, 5 de outubro de 2010

Problema 1 Dados dois vetores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos a matriz $v * w$ cujo elemento na linha i e coluna j é $v_i w_j$. Suponha que v e w são linearmente independentes. Determine o posto da matriz $v * w - w * v$.

Obs.: O posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes.

Problema 2 Num lado de um corredor existem $2N$ quartos igualmente espaçados numeradas sucessivamente de 1 até $2N$. Em cada quarto i entre 1 e N existem p_i camas. Deseja-se transportar todas estas camas aos quartos de $N+1$ a $2N$, de modo que ao final, para cada j entre $N+1$ e $2N$ haja p_j camas no quarto j. Suponha que cada cama pode ser transportada uma única vez e que o custo para transportar uma cama entre o quarto i e o quarto j é $(i-j)^2$.
Determine uma maneira de mover cada cama de tal forma que se minimize o custo total.

Obs.: Os números p_i são dados e satisfazem $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = p_{N+1} + p_{N+2} + \cdots + p_{2N}$.

Problema 3 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *dimensão zero* se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem um inteiro positivo k e intervalos limitados $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tais que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$ e $\sum_{j=1}^{k} |I_j|^{\varepsilon} < \varepsilon$.
Mostre que existem conjuntos $X, Y \subset [0,1]$, ambos de dimensão zero, tais que $X + Y = [0,2]$, onde $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Obs.: $|I|$ denota o comprimento do intervalo I.

Tempo de prova: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 pontos