

# XIV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

SEGUNDO DIA

28 de setembro de 2022

**Problema 4.** Dado um inteiro positivo  $n$ , determine quantas permutações  $\sigma$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, 2022n\}$  têm a seguinte propriedade: para cada  $i \in \{1, 2, \dots, 2021n + 1\}$ , o número

$$\sigma(i) + \sigma(i + 1) + \dots + \sigma(i + n - 1)$$

é um múltiplo de  $n$ .

**Problema 5.** Defina no plano a sequência de vetores  $v_1, v_2, \dots$  com valores iniciais  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  e satisfazendo a relação

$$v_n = \frac{v_{n-1} + v_{n-2}}{\|v_{n-1} + v_{n-2}\|},$$

para  $n \geq 3$ . Demonstrar que a sequência é convergente e determinar o seu limite.

**Nota:** A expressão  $\|v\|$  denota o comprimento do vetor  $v$ .

**Problema 6.** Dado um inteiro positivo  $m$ , seja  $d(m)$  o número de divisores positivos de  $m$ . Mostre que para todo inteiro positivo  $n$  vale que

$$d((n + 1)!) \leq 2d(n!).$$

*Tempo máximo: 4 horas e 30 minutos  
Cada problema vale 10 pontos*