

XIV Competencia Iberoamericana Interuniversidades de Matemáticas

PRIMEIRO DIA

27 de setembro de 2022

Problema 1. Dada a função $f(x) = x^2$, o setor de f de a a b é definido como a região limitada entre o gráfico de $y = f(x)$ e o segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Se define a sequência crescente x_0, x_1, \dots com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e tal que a área do setor de f de x_n até x_{n+1} é constante para $n \geq 0$. Determine o valor de x_n em função de n .

Problema 2. Seja $v \in \mathbb{R}^2$ um vetor de comprimento 1, e seja A uma matriz 2×2 com entradas reais tais que:

(i) Os vetores Av , A^2v e A^3v também têm comprimento 1.

(ii) O vetor A^2v não é igual a $\pm v$ nem a $\pm Av$.

Prove que $A^t A = I_2$.

Nota: A^t denota a transposta da matriz A , e I_2 é a matriz identidade 2×2 .

Problema 3. Danielle desenha no plano um ponto O e um conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_{2022}\}$ tais que

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \dots = \angle P_{2021}OP_{2022} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$$

onde os ângulos são medidos em sentido anti-horário e para $0 \leq n \leq 2022$ vale $OP_n = r^n$ com $r > 1$ um número real dado. Em seguida, obtém novos conjuntos de pontos no plano iterando o seguinte processo: dado um conjunto de pontos $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ no plano, constrói-se um novo conjunto de pontos $\{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ de modo que $A_k A_{k+1} B_k$ seja um triângulo equilátero orientado em sentido horário para $0 \leq k \leq n-1$. Depois de realizar o processo 2022 vezes a partir do conjunto \mathcal{P} , Danielle obtém um único ponto X . Se d é a distância de X ao ponto O , demonstrar que

$$(r-1)^{2022} \leq d \leq (r+1)^{2022}.$$

*Tempo máximo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 pontos*