CIMAT — Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.   Guanajuato, México

Primer día

21 de septiembre de 2019

Problema 1. Determinar todas las soluciones en números enteros x, y, z de la ecuación

$$x^z + y^z = z.$$

Problema 2. Consideramos el conjunto

$$\{0,1\}^n = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Decimos que $X > Y$ si $X \neq Y$ y se cumplen las n desigualdades

$$x_1 \geq y_1, \quad x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, \quad \ldots \quad , \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Definimos una cadena de longitud k como un subconjunto $\{Z_1, \ldots, Z_k\} \subseteq \{0,1\}^n$ de elementos distintos que satisfacen $Z_1 > Z_2 > \cdots > Z_k$. Determinar la mayor longitud posible de una cadena.

Problema 3. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no-nulos. Para $m \geq 1$, definimos:

$$X_m = \left\{ X \subseteq \{0, 1, ..., m-1\} \colon \left| \sum_{x \in X} a_x \right| > \frac{1}{m} \right\}$$

Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|X_n|}{2^n} = 1.$$

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.

Segundo día

22 de septiembre de 2019

Problema 4. Sea $(G, *)$ un grupo de $n > 1$ elementos y $g \in G$ un elemento distinto de la unidad. Ana y Bob juegan con el grupo G de la siguiente forma: Empezando con Ana y jugando de forma alternada cada jugador selecciona un elemento de G que no haya sido escogido antes, hasta que cada elemento de G haya sido elegido o un jugador haya escogido los elementos a y $a * g$ para algún $a \in G$. En ese caso se dice que el jugador pierde y su oponente gana.

a) Si n es impar, demostrar que, independiente del elemento g, uno de los dos jugadores tiene una estrategia que le asegure ganar sin importar cómo juega su oponente y determinar cual jugador posee tal estrategia.

b) Si n es par, demostrar que existe un elemento $g \in G$ para el cual ninguno de los jugadores posee una estrategia que le asegure ganar.

Nota: Un grupo $(G, *)$ es un conjunto G con una operación binaria $* : G \times G \to G$ que cumple las siguientes propiedades:
i) $*$ es asociativa: $\forall a, b, c \in G$ $(a * b) * c = a * (b * c)$;
ii) existe una unidad $e \in G$ tal que $\forall a \in G$ $a * e = e * a = a$;
iii) existen inversos: $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Problema 5. Sea $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ un conjunto de m números enteros. Demostrar que existe una matriz $m \times m$ con entradas enteras A tal que las matrices $A + k_j I, 1 \le j \le m$ son invertibles y sus inversas tienen entradas enteras (aqui I denota la matriz identidad).

Problema 6. Determinar todas las funciones inyectivas $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tales que para cada pareja de enteros positivos (m, n) se cumplen las condiciones:
a) $f(mn) = f(m)f(n)$
b) $f(m^2 + n^2) \,\Big|\, f(m^2) + f(n^2)$.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.