



Segundo dia

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

18 de novembro de 2017

Problema 4.

Sejam m, n inteiros positivos e $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ números reais positivos tais que, para todo inteiro positivo k , temos

$$\left| (a_1^k + \dots + a_m^k) - (b_1^k + \dots + b_n^k) \right| \leq Ck^N,$$

para certos C e N fixos. Prove que existem $l \leq m, n$ e permutações σ de $\{1, \dots, m\}$ e τ de $\{1, \dots, n\}$, tais que

1. $a_{\sigma(i)} = b_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq l$,
2. $a_{\sigma(i)}, b_{\tau(i)} \leq 1$ para $i > l$.

Problema 5.

Seja S um conjunto de inteiros. Dado um real positivo r , dizemos que S é um conjunto r -decente, se para qualquer par m, n de inteiros distintos e maiores que um que satisfaçam $\left| \frac{m-n}{m+n} \right| < r$, existe $a \in S$ e $k \geq 1$ tais que a^k divide m mas não divide n , ou a^k divide n mas não divide m .

1. Prove que, para qualquer $r > 0$, todos os conjuntos r -decentes possuem infinitos elementos primos.
2. Para cada $r > 0$, determine a maior cardinalidade possível de $\mathcal{P} \setminus S$, onde \mathcal{P} é o conjunto de todos os primos e $S \subset \mathcal{P}$ é um conjunto r -decente.

Problema 6.

Seja G um grafo simples, conexo e finito. Um caçador e um coelho invisível jogam no grafo G . O coelho está inicialmente em um vértice w_0 . Na k -ésima jogada (para $k \geq 0$), o caçador escolhe livremente um vértice v_k . Se $v_k = w_k$, o coelho é capturado e o jogo termina. Caso contrário, o coelho se move invisivelmente por uma aresta de w_k até w_{k+1} (w_k e w_{k+1} são adjacentes e, portanto, distintos) e o jogo continua. O caçador conhece estas regras e conhece o grafo G . Depois da k -ésima jogada, ele sabe se $w_k \neq v_k$, mas não recebe nenhuma outra informação.

Caracterize os grafos G para os quais o caçador tem uma estratégia que garanta que ele capture o coelho em no máximo N jogadas para algum inteiro positivo N . Aqui N deve depender apenas de G e a estratégia deve funcionar independentemente da posição inicial e da trajetória do coelho.

Nota: Um grafo é *simples* se suas arestas não são direcionadas, toda aresta liga dois vértices distintos e entre dois vértices há no máximo uma aresta. Um grafo simples é *finito* se tem um número finito de vértices. Um grafo simples é *conexo* se entre quaisquer dois vértices há um caminho (formado por arestas) ligando os dois vértices.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.