Segundo día

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

18 de noviembre de 2017

Problema 4.

Sean m, n enteros positivos y $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ números reales positivos tales que para todo entero positivo k se tiene que

$$\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right| \leq Ck^N,$$

para ciertos C y N fijos. Demuestre que existen $l \leq m, n$ y permutaciones σ de $\{1, \dots, m\}$ y τ de $\{1, \dots, n\}$, tales que

1. $a_{\sigma(i)} = b_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq l$,
2. $a_{\sigma(i)}, b_{\tau(i)} \leq 1$ para $i > l$.

Problema 5.

Sea S un conjunto de enteros. Dado un real positivo r, decimos que S es un conjunto r-*discerniente*, si para cualquier pareja m, n de enteros distintos y mayores a uno que satisfacen $\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < r$, existen un $a \in S$ y un $k \geq 1$ tal que a^k divide a m pero no divide a n, o, a^k divide a n pero no divide a m.

1. Demuestre que para cualquier $r > 0$ todos los conjuntos r-discernientes tienen una infinidad de elementos primos.
2. Para cada $r > 0$ determine la mayor cardinalidad posible de $\mathcal{P} \setminus S$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los primos y $S \subset \mathcal{P}$ es un conjunto r-discerniente.

Problema 6.

Sea G un grafo simple, conexo y finito. Un cazador y un conejo invisible juegan sobre el grafo G. El conejo está inicialmente en un vértice w_0. En la k-ésima jugada (para $k \geq 0$) el cazador escoge libremente un vértice v_k. Si $v_k = w_k$, el conejo es capturado y el juego acaba. En el caso contrario, el conejo se mueve invisiblemente por una arista de w_k hacia w_{k+1} (w_k y w_{k+1} son adyacentes y por lo tanto distintos) y continúa el juego. El cazador conoce estas reglas y conoce el grafo G. Después de la k-ésima jugada él sabe si $w_k \neq v_k$, pero no recibe ninguna otra información.

Caracterice los grafos G para los cuales el cazador tiene una estrategia que garantice que él capture al conejo en a lo sumo N jugadas para algún N entero positivo. Aquí N debe depender solamente de G y la estrategia debe funcionar independientemente de la posición inicial y la trayectoria del conejo.

Nota: Un grafo es *simple* si sus aristas no son direcionadas, toda arista une dos vértices distintos y entre dos vértices hay a lo sumo una arista. Un grafo simple es *finito* si tiene un número finito de vértices. Un grafo simple es *conexo* si entre cualesquiera dos vértices hay un camino (formado por aristas) uniendo los dos vértices.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.