



# Primer día

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

17 de noviembre de 2017

**Problema 1.** Determine todos los números complejos  $w = a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , tales que existe un polinomio  $p(z)$  con coeficientes reales y positivos que cumple  $p(w) = 0$ .

**Problema 2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que  $f(0) = 0$  y  $|f'(x)| \leq |f(x) \cdot \log |f(x)||$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  que cumple  $0 < |f(x)| < 1/2$ . Demuestre que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Problema 3.** Sean  $G$  un grupo abeliano finito y  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow G$  una función completamente multiplicativa (es decir  $f(mn) = f(m)f(n)$  para cualesquiera enteros positivos  $m, n$ ). Demuestre que existen infinitos enteros positivos  $k$  tales que  $f(k) = f(k + 1)$ .

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.