Prueba día 2

Lunes 6 de octubre de 2014

Tiempo: 4 horas, 30 minutos.
Valor: 10 puntos cada pregunta.
Cada respuesta debe ser justificada adecuadamente.

4. Sea (a_i) una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos. Definimos la sucesión (s_k):

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]},$$

donde $[a_i, a_{i+1}]$ denota el mínimo común múltiplo de a_i y a_{i+1}.

Muestre que la sucesión (s_k) es convergente.

5. A una función analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se le llama *interesante* si $f(z)$ es real a lo largo de la parábola $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

   a) Encuentre un ejemplo de una función interesante que no sea constante.
   b) Pruebe que todas las funciones interesantes f satisfacen que $f'(-3/4) = 0$.

6. *a*) Sea (x_n) una sucesión con $x_n \in [0, 1]$ para todo n. Pruebe que existe $C > 0$ tal que, para todo entero positivo r, existen $m \geq 1$ y $n > m + r$ que cumplen $(n - m)|x_n - x_m| \leq C$.
   b) Pruebe que para todo $C > 0$, existen una sucesión (x_n) con $x_n \in [0, 1]$ para todo n y un entero positivo r tales que, si $m \geq 1$ y $n > m + r$, entonces $(n - m)|x_n - x_m| > C$.