Prueba día 1

Domingo 5 de octubre de 2014

Tiempo: 4 horas, 30 minutos.
Valor: 10 puntos cada pregunta.
Cada respuesta debe ser justificada adecuadamente.

1. Sea $g : [2013, 2014] \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes dos condiciones:
   - $g(2013) = g(2014) = 0$,
   - para cualesquiera $a, b \in [2013, 2014]$ se tiene que $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq g(a) + g(b)$.

   Demuestre que g posee ceros en cualquier subintervalo abierto $]c, d[\subset [2013, 2014]$.

2. Sean n un entero positivo y p un primo mayor a 2. Muestre que:

$$(p-1)^n n! \,\big|\, (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\cdots(p^n - p^{n-1}) \; .$$

3. Dado $n \geq 2$, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos del conjunto con n elementos $\{1, \ldots, n\}$ tal que, para cualesquiera $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$, se cumple que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n - 2$.

   Muestre que $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-2}$.

   Nota: $|X|$ designa la cardinalidad del conjunto X.