Segundo dia

Armenia, Colômbia

18 de outubro de 2013

Problema 4. Sejam $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ números reais positivos e $F, G : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ duas funções diferenciáveis e positivas que satisfazem as identidades:

$$\frac{x}{F} = 1 + a_1 x + b_1 y + c_1 G$$
$$\frac{y}{G} = 1 + a_2 x + b_2 y + c_2 F.$$

Demonstrar que se $0 < x_1 \leq x_2$ e $0 < y_2 \leq y_1$, então $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ e $G(x_1, y_1) \geq G(x_2, y_2)$.

Problema 5. Sejam A e B matrizes da ordem $n \times n$ com entradas complexas. Demonstrar que existe uma matriz T, e uma matriz invertível S tal que

$$B = S(A + T)S^{-1} - T$$

se e somente se $tr(A) = tr(B)$, onde tr denota o traço de uma matriz.

Problema 6. Seja (X, d) um espaço métrico com $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Suponhamos que X é conexo e compacto. Demonstrar que existe um $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo inteiro $n > 0$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$, existe $x \in X$ tal que a média das distâncias de $x_1, \ldots, x_n$ a x é α, ou seja:

$$\frac{d(x, x_1) + d(x, x_2) + \cdots + d(x, x_n)}{n} = \alpha.$$

Cada problema vale no máximo 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.