Primeiro dia

Armenia, Colômbia

17 de outubro de 2013

Problema 1. Dados dois números naturais m e n denotamos por $\overline{m,n}$ ao número decimal que tem o m antes da vírgula e o n depois da vírgula.

a) Demonstrar que existem infinitos números naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **não tem** solução.

b) Demonstrar que existem infinitos números naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **tem** solução.

Problema 2. Consideremos um polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grau n sem raízes reais. Demonstrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p(x))^2 + (p'(x))^2}\, dx$$

converge, e é menor ou igual a $n^{3/2}\pi$.

Problema 3. Dado um conjunto de meninos e meninas, um par (A, B) de pessoas será chamado *amigável* se A e B são amigos. A relação de amizade é simétrica. Um conjunto de pessoas é *afetuoso* se satisfazem as seguintes condições:

i) O conjunto tem o mesmo número de meninos e meninas.

ii) Para cada quatro pessoas distintas A, B, C, D, se os pares (A, B), (B, C), (C, D) e (D, A) são todos amigáveis, então pelo menos um dos pares (A, C) e (B, D) é também amigável.

iii) Pelo menos $\frac{1}{2013}$ de todos os pares menino–menina são amigáveis.

Seja m um inteiro positivo. Demonstrar que existe um inteiro $N(m)$ tal que se um conjunto afetuoso tem $N(m)$ pessoas ou mais, então existem m meninos que são todos amigos entre si ou m meninas que são todas amigas entre si.

Cada problema vale no máximo 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.