Segundo día

Armenia, Colombia

18 de octubre de 2013

Problema 4. Sean $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ números reales positivos y $F, G : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ dos funciones diferenciables y positivas que cumplan las identidades:

$$\frac{x}{F} = 1 + a_1x + b_1y + c_1G$$
$$\frac{y}{G} = 1 + a_2x + b_2y + c_2F.$$

Demostrar que si $0 < x_1 \leq x_2$ y $0 < y_2 \leq y_1$, entonces $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ y $G(x_1, y_1) \geq G(x_2, y_2)$.

Problema 5. Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$ con entradas complejas. Demostrar que existen una matriz T, y una matriz invertible S tales que

$$B = S(A + T)S^{-1} - T$$

si y solamente si $tr(A) = tr(B)$, donde tr denota la traza de una matriz.

Problema 6. Sea (X, d) un espacio métrico con $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supongamos que X es conexo y compacto. Demostrar que existe un $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple la siguiente propiedad: para todo entero $n > 0$ y cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, existe $x \in X$ tal que el promedio de las distancias de $x_1, \ldots, x_n$ a x es α, es decir:

$$\frac{d(x, x_1) + d(x, x_2) + \cdots + d(x, x_n)}{n} = \alpha.$$

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.