Primer día

Armenia, Colombia

17 de octubre de 2013

Problema 1. Dados dos números naturales m y n denotamos por $\overline{m,n}$ al número que resulta si a m le escribimos n después de la coma decimal.

a) Demostrar que existen infinitos números naturales k tales que para cada uno de ellos la ecuación $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **no tiene** solución.

b) Demostrar que existen infinitos números naturales k tales que para cada uno de ellos la ecuación $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **tiene** solución.

Nota: En algunos países, en lugar de "coma decimal" se utiliza "punto decimal".

Problema 2. Consideremos un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grado n sin raíces reales. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p(x))^2 + (p'(x))^2}\, dx$$

converge, y es menor o igual a $n^{3/2}\pi$.

Problema 3. Dado un conjunto de niños y niñas, llamaremos *amigable* a una pareja (A, B) de personas si A y B son amigos. La relación de amistad es simétrica. Un conjunto de personas es *afectuoso* si se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) El conjunto tiene el mismo número de niños y niñas.

ii) Para cada cuatro personas distintas A, B, C, D, si las parejas (A, B), (B, C), (C, D) y (D, A) son todas amigables, entonces por lo menos una de las parejas (A, C) y (B, D) es también amigable.

iii) Por lo menos $\frac{1}{2013}$ de todas las parejas niño–niña son amigables.

Sea m un entero positivo. Demostrar que existe un entero $N(m)$ tal que si un conjunto afectuoso tiene $N(m)$ personas o más, entonces existen m niños que son todos amigos entre sí o m niñas que son todas amigas entre sí.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.