# IV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

CIMAT, Guanajuato, México del 1 al 5 de octubre de 2012

## Segundo dia

Guanajuato, Gto., México
3 de outubro de 2012

Problema 4. Seja $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Encontrar

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Problema 5. Seja $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Uma *função de direção* para $D$ é uma função $f : D \times D \to \{0, 1\}$. Um real $r \in [0, 1]$ é *compatível com* $f$ se podemos escrevê-lo na forma

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

com $d_j \in D$ e $f(d_j, d_{j+1}) = 1$ para todo inteiro positivo $j$.

Determinar o menor inteiro $k$ tal que para toda função de direção $f$, se há $k$ reais compatíveis com $f$ então há infinitos reais compatíveis com $f$.

Problema 6. Sejam $n \geq 2$ e $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstrar que se existe um inteiro positivo $k$ tal que $(x-1)^{k+1}$ divide $p(x)$ então

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| > 1 + \frac{2k^2}{n}.$$

**Cada problema vale 10 pontos.**

**Tempo máximo: 4h 30m.**