IV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

CIMAT, Guanajuato, México del 1 al 5 de octubre de 2012

Primeiro dia

Guanajuato, Gto., México

2 de outubro de 2012

Problema 1. Para cada inteiro positivo n se define A_n como a matriz de tamanho $n \times n$ tal que sua entrada a_{ij} é igual a $\binom{i+j-2}{j-1}$ para todos os $1 \leq i,\ j \leq n$. Calcular o valor do determinante de A_n.

Problema 2. Um conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ *é simpático* se sempre que $x, y \in A$ com $x \leq y$ temos também que $2y - x \in A$. Demonstrar que se A é simpático, $0,\ a,\ b \in A$ com $0 < a < b$ e $d = \text{mcd}(a, b)$ então

$$a + b - 3d,\ a + b - 2d \in A.$$

Problema 3. Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Demonstrar que

$$\sqrt{\frac{(3a+b)(3b+a)}{(2a+c)(2b+c)}} + \sqrt{\frac{(3b+c)(3c+b)}{(2b+a)(2c+a)}} + \sqrt{\frac{(3c+a)(3a+c)}{(2c+b)(2a+b)}} \geq 4.$$

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.