



Problema 4. Sea $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Hallar

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Problema 5. Sea $D = \{0, 1, \dots, 9\}$. Una *función de dirección* para D es una función $f : D \times D \rightarrow \{0, 1\}$. Un real $r \in [0, 1]$ es *compatible con f* si se puede escribir de la forma

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

con $d_j \in D$ y $f(d_j, d_{j+1}) = 1$ para todo entero positivo j .

Determinar el menor entero k tal que para toda función de dirección f , si hay k reales compatibles con f entonces hay infinitos reales compatibles con f .

Problema 6. Sean $n \geq 2$ y $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales. Demostrar que si existe un entero positivo k tal que $(x - 1)^{k+1}$ divide a $p(x)$ entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| > 1 + \frac{2k^2}{n}.$$

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.