III Competencia IBEROAMERICANA Interuniversitaria de Matemáticas
Ecuador - 2011

Segundo Día. Miércoles 5 de Octubre, 2011

4. Para $n \geq 3$, sea $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Sea $C_n = (c_{i,j})_{n\times n}$ la matriz definida por $c_{i,j} = b_{(j-i) \bmod n}$. Demuestre que $\det(C_n) = 3$ si n no es un múltiplo de 3 y $\det(C_n) = 0$ si n es un múltiplo de 3.

   Nota: m mod n es el residuo de la división de m por n .

5. Sea n un entero positivo con d dígitos, todos distintos de cero. Para $k = 0, \ldots, d-1$, definimos n_k como el número que se obtiene al mover los últimos k dígitos de n al inicio. Por ejemplo, si $n = 2184$ entonces $n_0 = 2184$, $n_1 = 4218$, $n_2 = 8421$ y $n_3 = 1842$. Para m un entero positivo, definimos $s_m(n)$ como la cantidad de valores k tales que n_k es múltiplo de m. Finalmente, definimos a_d como la cantidad de enteros n con d dígitos, todos distintos de cero, para los cuales $s_2(n) + s_3(n) + s_5(n) = 2d$. Encuentre
$$\lim_{d\to\infty} \frac{a_d}{5^d} .$$

6. Sea Γ la rama $x > 0$ de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Sean $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ puntos distintos de Γ con $P_0 = (1, 0)$ y $P_1 = (13/12, 5/12)$. Sea t_i la recta tangente a Γ en P_i. Suponga que para todo $i \geq 0$ el área de la región delimitada por t_i, t_{i+1} y Γ es una constante que no depende de i . Encuentre las coordenadas de los puntos P_i en función de i.