



Primer Día. Martes 4 de Octubre, 2011.

1. Encuentre todos los números reales a para los cuales existen números reales b, c, d diferentes entre sí y diferentes de a tales que las cuatro tangentes trazadas a la curva $y = \text{sen}(x)$ en los puntos $(a, \text{sen}(a))$, $(b, \text{sen}(b))$, $(c, \text{sen}(c))$ y $(d, \text{sen}(d))$ forman un rectángulo.
2. Sea k un entero positivo y sea a un entero tal que $a - 2$ es múltiplo de 7 y $a^6 - 1$ es múltiplo de 7^k . Pruebe que $(a + 1)^6 - 1$ también es múltiplo de 7^k .
3. Sea $f(x)$ una función racional con coeficientes complejos cuyo denominador no tiene raíces múltiples. Sean u_0, u_1, \dots, u_n las raíces complejas de f y w_1, w_2, \dots, w_m las raíces de f' . (Cada raíz está considerada tantas veces como su multiplicidad). Suponga que u_0 es una raíz de multiplicidad uno de f . Pruebe que

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{w_k - u_0} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - u_0} .$$

Nota: Una función racional es el cociente de dos polinomios.