II COMPETENCIA IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITARIA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

Petrópolis, Brasil, 6 de octubre de 2010

Problema 4 Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función creciente, continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y con derivada menor que 1 en cada punto. Definimos la sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de la siguiente forma: $A_1 = f([0,1])$, y para $n \geq 2, A_n = f(A_{n-1})$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(A_n) = 0$, donde $d(A)$ es el diámetro del conjunto A.

Obs.: El diámetro del conjunto X se define como $d(X) = \sup\limits_{x,y\in X} |x-y|$, o bien como la longitud del intervalo $[a,b]$ que contiene a X para el cual $b-a$ es mínimo.

Problema 5 Sean n y d enteros mayores que 1 con $\operatorname{mcd}(n, d!) = 1$. Pruebe que n y $n+d$ son primos si, y solo si

$$d!d((n-1)!+1) + n(d!-1) \equiv 0 \pmod{n(n+d)}.$$

Problema 6 Decimos que un grupo es localmente cíclico si cada uno de sus subgrupos finitamente generados es cíclico. Pruebe que un grupo localmente cíclico es isomorfo a uno de sus subgrupos propios si y sólo si es isomorfo a un subgrupo propio del grupo de los números racionales con la operación suma.

Obs.:
– Un grupo es finitamente generado si contiene un subconjunto finito de elementos tal que con estos y sus inversos es posible obtener cualquier otro elemento del grupo usando la operación del grupo un número finito de veces.
– Un grupo es cíclico si es generado por un elemento.
– Un subgrupo propio es un subgrupo estrictamente contenido en el grupo.

Tiempo de prueba: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos