II COMPETENCIA IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITARIA DE MATEMÁTICAS

Primer día

Petrópolis, Brasil, 5 de octubre de 2010

Problema 1 Dados dos vectores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos la matriz $v * w$ en la cual el elemento en la línea i y la columna j es $v_i w_j$. Suponga que v y w son linealmente independientes. Determine el rango de la matriz $v * w - w * v$.

Obs.: El rango de una matriz es su número máximo de columnas linealmente independientes.

Problema 2 En un lado de un pasillo existen $2N$ habitaciones igualmente espaciadas numeradas sucesivamente de 1 hasta $2N$. En cada habitación i entre 1 y N existen p_i camas. Se desea transportar todas estas camas a las habitaciones de la $N+1$ a la $2N$, de modo que al final, para cada j entre $N+1$ y $2N$ haya p_j camas en la habitación j. Suponga que cada cama puede ser transportada una única vez y que el costo para transportar una cama entre la habitación i y la habitación j es $(i-j)^2$.
Determine una manera de mover cada cama de tal forma que se minimice el costo total.

Obs.: Los números p_i son dados y cumplen que $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = p_{N+1} + p_{N+2} + \cdots + p_{2N}$.

Problema 3 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *dimensión cero* si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existen un entero positivo k e intervalos acotados $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tales que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$ y $\sum_{j=1}^{k} |I_j|^{\varepsilon} < \varepsilon$.
Pruebe que existen conjuntos $X, Y \subset [0,1]$, ambos de dimensión cero, tales que $X + Y = [0,2]$, donde $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Obs.: $|I|$ denota la longitud del intervalo I.

Tiempo de prueba: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos