

Girardot, Colombia, 2009
Segundo Día
7 de octubre

Problema 4

Sean m una recta en el plano y M un punto que no pertenece a m . Encontrar el lugar geométrico de los focos de las parábolas con vértice M que sean tangentes a m .

Problema 5

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$.

ii) Para todo $b \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$, existen $x, y \in \mathbb{R}$, con $b - \varepsilon < x < b < y < b + \varepsilon$, tal que $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ y $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$.

Demostrar que si $f(a) < d < f(b)$, entonces existe c con $a < c < b$ o $b < c < a$ tal que $f(c) = d$.

Problema 6

Sea ε una raíz n -ésima de la unidad. Supongamos que $z = p(\varepsilon)$ es un número real para algún polinomio p (no constante) con coeficientes enteros. Demostrar que existe un polinomio q con coeficientes enteros tal que $z = q(2 \cos 2\pi/n)$.

Duración: $4\frac{1}{2}$ horas
Cada problema recibe un máximo de 10 puntos